BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **5**

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **4**

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats

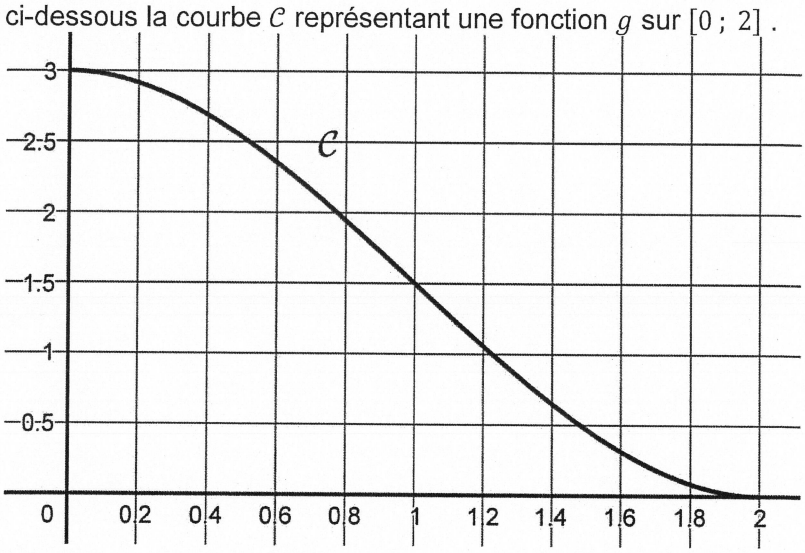
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Aucune justification n'est demandée.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre de la réponse choisie.

1. Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0\,;\,5]$ par $f(x) = x\ln(x) + 1$. Pour tout $x \in]0\,;\,5]$,
   a) $f'(x) = \frac{1}{x}$
   b) $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$
   c) $f'(x) = \ln(x) + 2$
   d) $f'(x) = \ln(x) + 1$

2. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentant une fonction g sur $[0\,;\,2]$.



   a) g est concave sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
   b) $g''(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0\,;\,2]$.
   c) La courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion sur $[0\,;\,2]$.
   d) $g'(1) > 0$.

3. Soit $I = \int_0^{\ln(2)} 3e^x dx$. On a :

   a) $I = 3$
   b) $I = 6$
   c) $I = -3$
   d) $I = 3\ln(2)$

4. Pour tout événement E, on note $P(E)$ sa probabilité. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0{,}3$.

   a) $P(X = 3) = 120 \times 0{,}3^2 \times 0{,}7^8$
   b) $P(X = 3) = 12 \times 0{,}3^3 \times 0{,}7^7$
   c) $P(X \geq 1) \simeq 0{,}972$
   d) L'espérance de X est 5,15.

Exercice 2 (5 points)
Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Dans un quartier d'une petite ville, les services de Pôle Emploi ont relevé le nombre de demandeurs d'emploi chaque trimestre.
Après observations, ils constatent que, chaque trimestre, 123 nouveaux demandeurs d'emploi s'inscrivent tandis que 37,5 % des chômeurs trouvent un emploi et sont retirés des listes.
Au début du premier trimestre 2017 (1er janvier 2017), le nombre de demandeurs d'emploi était de 490.

On note u_n le nombre de demandeurs d'emploi au début du n-ième trimestre après le 1er janvier 2017.
Ainsi, $u_1 = 490$.

Dans tout l'exercice, les valeurs seront arrondies à l'unité.

1. Calculer le nombre de demandeurs d'emploi au début du deuxième et du troisième trimestre 2017.

2. Justifier que l'on peut modéliser la situation précédente par la relation, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_{n+1} = 0{,}625u_n + 123.$$

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - 328$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial.
   b) Exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, v_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 162 \times 0{,}625^{n-1} + 328$.

4. Calculer le nombre de demandeurs d'emploi au début du deuxième trimestre 2019.

5. Le directeur de l'agence pourra-t-il atteindre son objectif de diminuer le nombre de demandeurs d'emploi de 30 % par rapport au premier trimestre 2017 ? Si oui, indiquer à quelle date son objectif sera atteint. Justifier la réponse.

Exercice 3 (6 points)
Commun à tous les candidats

Dans une entreprise, 60 % des salariés viennent au travail en transports en commun et parmi eux, seulement 7,5 % ont un trajet d'une durée inférieure à 30 minutes. Parmi les employés qui n'utilisent pas les transports en commun, 28,5 % ont un trajet d'une durée inférieure à 30 minutes.

Pour tout événement E, on note $\bar{E}$ l'événement contraire de E et $P(E)$ sa probabilité. Pour tout événement F de probabilité non nulle, on note $P_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

On interroge au hasard un employé de l'entreprise et on considère les événements suivants :

- C : « l'employé utilise les transports en commun » ;
- R : « le trajet de l'employé a une durée inférieure à 30 minutes ».

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

Partie A

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation et le compléter.
2. a) Calculer $P(C \cap R)$ et interpréter le résultat obtenu.
   b) Montrer que $P(R) = 0{,}159$.
3. On interroge un employé choisi au hasard dont la durée du trajet est inférieure à 30 minutes. Calculer la probabilité qu'il utilise les transports en commun.

Partie B

Une étude a montré que la durée du trajet en minutes d'un employé peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 40$ et d'écart type $\sigma = 10$.

1. Déterminer $P(X \leq 30)$. Indiquer si ce résultat est cohérent avec la partie A, en justifiant la réponse.
2. Déterminer $P(20 \leq X \leq 60)$ et en déduire $P(X > 60)$.

3. Dans cette question, on se propose de déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \geq a) \simeq 0{,}008$.

a) On admet que lorsque la valeur de a augmente, la valeur de $P(X \geq a)$ diminue.
On considère l'algorithme ci-dessous, où X est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 40$ et d'écart type $\sigma = 10$.
Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il permette de répondre à la question.

```
a ← 60
Y ← 0,023
Tant que Y > 0,008
  a ← ...
  Y ← P(X ≥ a)
Fin Tant que
```

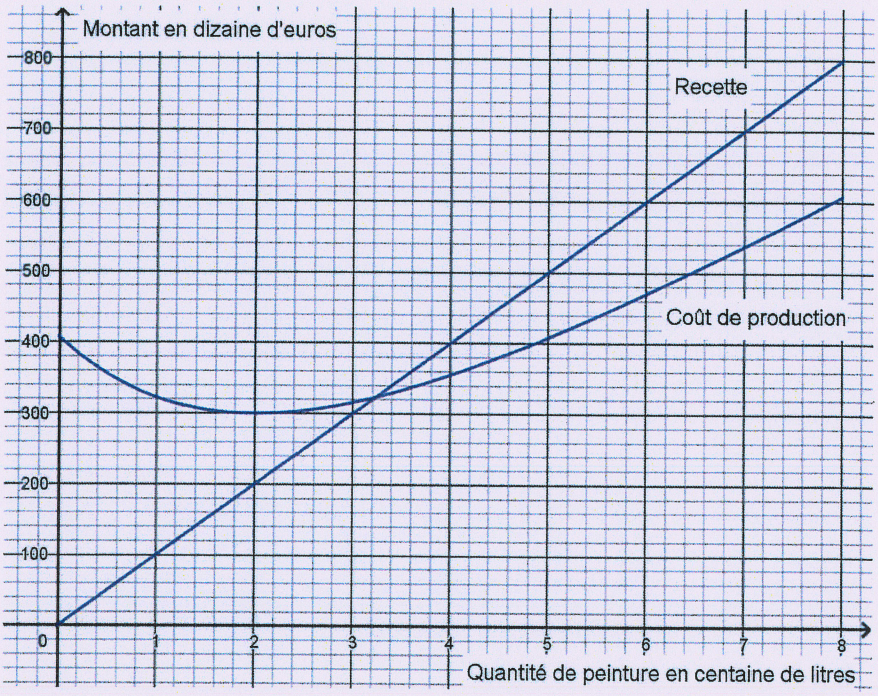
b) On exécute cet algorithme.
Recopier et compléter le tableau suivant, en utilisant autant de colonnes que nécessaire.

a	60	61	62			
Y	0,023	0,018	0,014			

4. Donner la valeur de a obtenue après exécution de l'algorithme.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 4 (5 points)
Commun à tous les candidats

L'entreprise ECOLOR est spécialisée dans la production et la vente de peinture éco-responsable. La production quotidienne varie entre 0 et 800 litres. Toute la production est vendue. Les montants de la recette et du coût sont exprimés en dizaine d'euros.



Partie A : lecture graphique

À l'aide du graphique ci-dessus, répondre aux questions suivantes.

1. Déterminer le coût de production de 200 litres de peinture.
2. Quelle est la production de peinture pour avoir une recette de 5 000 euros ?
3. À partir de combien de litres de peinture vendus l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
4. L'entreprise peut-elle réaliser un bénéfice de plus de 3 000 euros pour une production quotidienne variant entre 0 et 800 litres ? Justifier.

Partie B : étude du bénéfice

Le bénéfice en dizaine d'euros correspondant à la vente de x centaines de litres de peinture est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ par :

$$f(x) = 25x - 150\mathrm{e}^{-0,5x+1}$$

1. Donner les valeurs exactes de $f(0)$ et de $f(8)$, puis en donner les valeurs arrondies au centième.
2. Montrer que la dérivée f' de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ est :
$$f'(x) = 25 + 75\mathrm{e}^{-0,5x+1}.$$
3. Déterminer le signe de f' et en déduire les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,8]$.
4. a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ puis en donner la valeur arrondie au centième.
   b) En déduire la quantité de peinture produite et vendue à partir de laquelle l'entreprise ECOLOR réalisera un bénéfice. Donner le résultat au litre près.